KA-nejednakost

Ilija Ilišević*

Sažetak. *U radu se dokazuje kvadratno-aritmetička nejednakost. Primjene spomenute nejednakosti ilustriraju se na velikom broju primjera koji su prilagođeni učenicima srednje škole.*

Ključne riječi: *nejednakosti*

SA-inequality

Abstract. *A square-arithmetic inequality is proved in the paper. Applications of the mentioned inequalities are illustrated on numerous examples adapted to high-school pupils.*

Key words: *inequalities*

Neka je $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ n-torka nenegativnih realnih brojeva. Aritmetičku i kvadratnu sredinu n-torke a redom definiramo sa

$$A_n(a) = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}, \qquad K_n(a) = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}.$$

Vrijedi:

Teorem [kvadratno-aritmetička nejednakost, kraće KA-nejednakost].

$$K_n(a) \geq A_n(a).$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Dokaz 1.
Kako iz $(x-y)^2 \geq 0$ slijedi $2xy \leq x^2 + y^2$ s jednakošću ako i samo ako je $x = y$, to je

$$\begin{aligned}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 &= a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 + 2a_1a_2 + 2a_2a_3 + \cdots + 2a_{n-1}a_n \\ &\leq a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 + (a_1^2 + a_2^2) + (a_2^2 + a_3^2) + \cdots + (a_{n-1}^2 + a_n^2) \\ &= n(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2),\end{aligned}$$

odakle slijedi

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^2 \leq \frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n},$$

*III. gimnazija, Kamila Firingera 14, HR-31000 Osijek

pa je $K_n(a) \geq A_n(a)$. Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. □

Dokaz 2.

Prema Cauchy-Schwarz-Buniakowskijevoj nejednakosti je

$$\begin{aligned}(1 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2 + \cdots + 1 \cdot a_n)^2 &\leq (1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2)(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) \\ &= n(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2),\end{aligned}$$

odakle slijedi $K_n(a) \geq A_n(a)$. Jednakost vrijedi ako i samo ako je $1/a_1 = 1/a_2 = \cdots = 1/a_n$ odnosno $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. □

Zadatak 1. *Neka su x, y, z pozitivni realni brojevi čija je suma jednaka 6. Dokažite da vrijedi nejednakost $x^2 + y^2 + z^2 \geq 12$.*

Rješenje. Prema KA-nejednakosti je

$$\sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}} \geq \frac{x + y + z}{3} = \frac{6}{3} = 2.$$

Kvadriranjem i sređivanjem dobivamo nejednakost koju je trebalo dokazati. Jednakost vrijedi ako i samo ako je $x = y = z = 2$.

Zadatak 2. *Dokažite da vrijedi nejednakost*

$$\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7} < 14.$$

Rješenje. Kako je prema KA-nejednakosti

$$\begin{aligned}&\frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7}}{7} \\ < &\sqrt{\frac{(\sqrt{1})^2 + (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{4})^2 + (\sqrt{5})^2 + (\sqrt{6})^2 + (\sqrt{7})^2}{7}} \\ = &\sqrt{\frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7}{7}} = \sqrt{4} = 2,\end{aligned}$$

to je $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7} < 14$. Vrijedi stroga nejednakost jer je $\sqrt{1} \neq \sqrt{2}$.

Zadatak 3. *Neka su $x_i \in [0, 1]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, takvi da je $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$. Dokažite da tada vrijedi*

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geq \frac{1}{n}.$$

Rješenje. Kako je prema KA-nejednakosti

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n},$$

to je

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geq \frac{1}{n}.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1/n$.

Zadatak 4. *Neka su a, b, c duljine stranica trokuta ABC. Dokažite da vrijedi nejednakost*

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2 \leq \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

Rješenje. Kako je prema KA-nejednakosti

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{3} \leq \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{c}\right)^2}{3}},$$

to je

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2 \leq \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $1/a = 1/b = 1/c$, tj. $a = b = c$.

Zadatak 5. *Neka su x_1, x_2, x_3, x_4 pozitivni realni brojevi takvi da je $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_4^2$. Dokažite da tada vrijedi nejednakost*

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq x_4\sqrt{3}.$$

Rješenje. Prema KA-nejednakosti je

$$\frac{x_1+x_2+x_3}{3} \leq \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{3}},$$

pa je

$$x_1+x_2+x_3 \leq 3\cdot\sqrt{\frac{x_4^2}{3}} = \frac{3x_4}{\sqrt{3}} = x_4\sqrt{3}.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $x_1 = x_2 = x_3 = x_4/\sqrt{3}$.

Zadatak 6. *Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pozitivni realni brojevi takvi da je $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$. Dokažite da tada vrijedi nejednakost*

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \cdots + \sqrt{x_n} \leq \sqrt{n}.$$

Rješenje. Iz

$$\frac{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_n}}{n} \leq \sqrt{\frac{(\sqrt{x_1})^2+(\sqrt{x_2})^2+\cdots+(\sqrt{x_n})^2}{n}}$$

dobivamo

$$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_n} \leq n\cdot\sqrt{\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}} = n\cdot\sqrt{\frac{1}{n}} = \sqrt{n}.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1/n$.

Zadatak 7. *Neka su a, b, c, d pozitivni realni brojevi takvi da je $a + b + c > d$. Dokažite da tada vrijedi nejednakost*

$$(a + b + c)^2 - \frac{d^2}{3} > 2(ab + bc + ca).$$

Rješenje. Prema KA-nejednakosti je

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} \geq \frac{a + b + c}{3} > \frac{d}{3},$$

odakle dobivamo

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} - \frac{d^2}{9} > 0$$

odnosno

$$a^2 + b^2 + c^2 - \frac{d^2}{3} > 0.$$

Dodavanjem $2(ab + ac + bc)$ objema stranama posljednje nejednakosti dobivamo

$$(a + b + c)^2 - \frac{d^2}{3} > 2(ab + bc + ca).$$

Zadatak 8. *Neka su a i b duljine kateta, a c duljina hipotenuze pravokutnog trokuta ABC. Dokažite da tada vrijedi nejednakost*

$$a + b \leq c\sqrt{2}.$$

Rješenje. Kako je prema KA-nejednakosti

$$\frac{a + b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}},$$

to je

$$a + b \leq 2 \cdot \sqrt{\frac{c^2}{2}} = c\sqrt{2}.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a = b$.

Zadatak 9. *Neka su a, b, c duljine stranica trokuta ABC. Dokažite da vrijedi nejednakost*

$$\sqrt{a + b - c} + \sqrt{b + c - a} + \sqrt{c + a - b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

Rješenje. Neka je $s = (a + b + c)/2$ poluopseg trokuta i neka je $x = s - a$, $y = s - b$ i $z = s - c$. Tada je $a = y + z$, $b = z + x$, $c = x + y$, pa je dana nejednakost ekvivalentna sa

$$\sqrt{2x} + \sqrt{2y} + \sqrt{2z} \leq \sqrt{x + y} + \sqrt{y + z} + \sqrt{z + x}.$$

Dokažimo ovu nejednakost. Prema KA-nejednakosti je

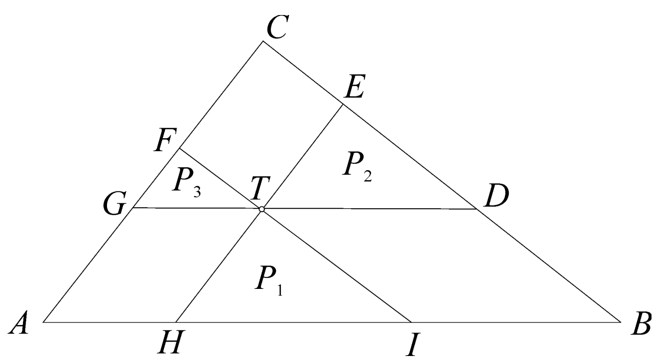
$$\begin{aligned}
&\sqrt{2x}+\sqrt{2y}+\sqrt{2z}\\
= \quad & \frac{\sqrt{2x}+\sqrt{2y}}{2}+\frac{\sqrt{2y}+\sqrt{2z}}{2}+\frac{\sqrt{2z}+\sqrt{2x}}{2}\\
\le \quad & \sqrt{\frac{(\sqrt{2x})^2+(\sqrt{2y})^2}{2}}+\sqrt{\frac{(\sqrt{2y})^2+(\sqrt{2z})^2}{2}}+\sqrt{\frac{(\sqrt{2z})^2+(\sqrt{2x})^2}{2}}+\\
= \quad & \sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}.
\end{aligned}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $x=y=z$, tj. $a=b=c$.

Zadatak 10. *Točkom T unutar trokuta površine P konstruirana su tri pravca paralelna stranicama trokuta. Ovi pravci sa stranicama trokuta tvore tri nova trokuta čije površine označimo sa P_1, P_2 i P_3. Dokažite da je*

$$P_1+P_2+P_3\ge\frac{1}{3}P.$$

Rješenje. Uvedimo oznake kao na *Slici 1.*



Slika 1

Trokuti HIT, TDE i GTF su slični trokutu ABC. Stoga je

$$\sqrt{\frac{P_1}{P}}=\frac{|HT|}{|AC|}=\frac{|AG|}{|AC|},$$

$$\sqrt{\frac{P_2}{P}}=\frac{|TE|}{|AC|}=\frac{|FC|}{|AC|},$$

$$\sqrt{\frac{P_3}{P}}=\frac{|GF|}{|AC|}.$$

Zbrajanjem dobivamo

$$\frac{\sqrt{P_1}+\sqrt{P_2}+\sqrt{P_3}}{\sqrt{P}}=\frac{|AG|+|GF|+|FC|}{|AC|}=\frac{|AC|}{|AC|}=1,$$

pa je

$$\sqrt{P_1}+\sqrt{P_2}+\sqrt{P_3}=\sqrt{P}.$$

Prema KA-nejednakosti je

$$\frac{\sqrt{P_1}+\sqrt{P_2}+\sqrt{P_3}}{3}\le\sqrt{\frac{(\sqrt{P_1})^2+(\sqrt{P_2})^2+(\sqrt{P_3})^2}{3}},$$

odakle je

$$\frac{P_1+P_2+P_3}{3}\ge\left(\frac{\sqrt{P_1}+\sqrt{P_2}+\sqrt{P_3}}{3}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{P}}{3}\right)^2=\frac{P}{9},$$

tj.

$$P_1+P_2+P_3\ge\frac{1}{3}P.$$

Zadaci za vježbu

1. Neka su x, y i z nenegativni realni brojevi takvi da je $x^2+y^2+z^2=1$. Dokažite da tada vrijedi nejednakost

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}\ge\frac{9}{3+\sqrt{3}}.$$

2. Neka su a,b,c i d nenegativni realni brojevi čija je suma jednaka 1, a suma njihovih kvadrata nije veća od $\frac{1}{3}$. Dokažite da niti jedan od tih brojeva nije veći od $\frac{1}{2}$.

3. Neka su $a_1,a_2,\ldots,a_{2k}$ pozitivni realni brojevi manji od 1. Dokažite da tada vrijedi nejednakost

$$\begin{aligned}&\sqrt{a_1^2+(1-a_2)^2}+\sqrt{a_2^2+(1-a_3)^2}+\ldots\\ +\quad&\sqrt{a_{2k-1}^2+(1-a_{2k})^2}+\sqrt{a_{2k}^2+(1-a_1)^2}\ge k\sqrt{2}.\end{aligned}$$

4. Neka su t_a, t_b, t_c duljine težišnica, a R polumjer trokutu ABC opisane kružnice. Dokažite da vrijedi nejednakost

$$t_a+t_b+t_c\le\frac{9}{2}R.$$

Literatura

[1] B. Domonkos, *Néhány tipikus problémaszituáció matematikából*, Mozaik, Szeged, 1994.

[2] A. Engel, *Problem-Solving Strategies*, Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg, 1998.

[3] B. Pavković, B. Dakić, Ž. Hanjš, P. Mladinić, *Male teme iz matematike*, HMD i Element, Zagreb, 1994.

[4] J. Pečarić, *Nejednakosti*, HMD i Element, Zagreb, 1996.